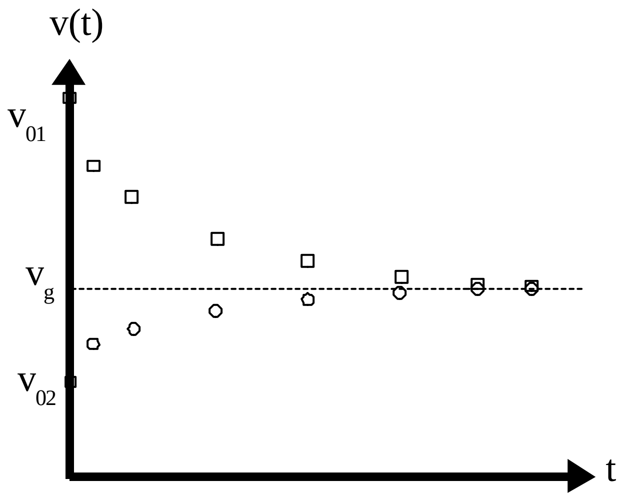
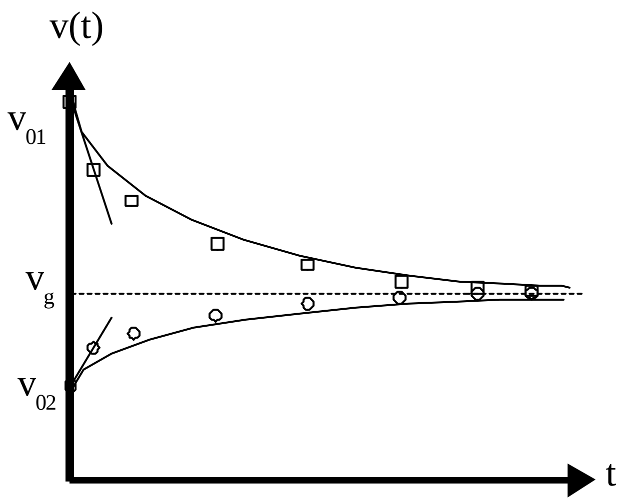
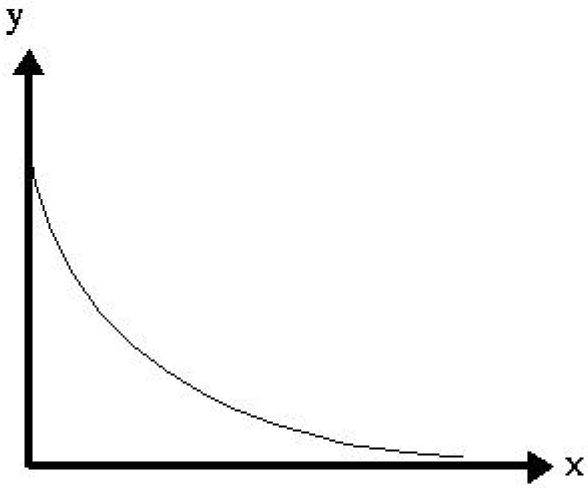
Das Thema dieser Stunde war die Fortführung der in der vorherigen begonnenen Überlegungen zur Fallbewegung im Randbereich eines homogenen Magnetfeldes. Die bisher gewonnenen Erkenntnisse sagten aus, dass ein Leiterrahmen, der senkrecht in ein horizontal verlaufendes Magnetfeld eintaucht, unabhängig von seiner Eintrittsgeschwindigkeit auf eine bestimmte Grenzgeschwindigkeit beschleunigt oder abgebremst wird. Die durch Rekursion berechnete Darstellung eines v(t)-t-Diagramms sieht folgendermaßen aus (Skizze):

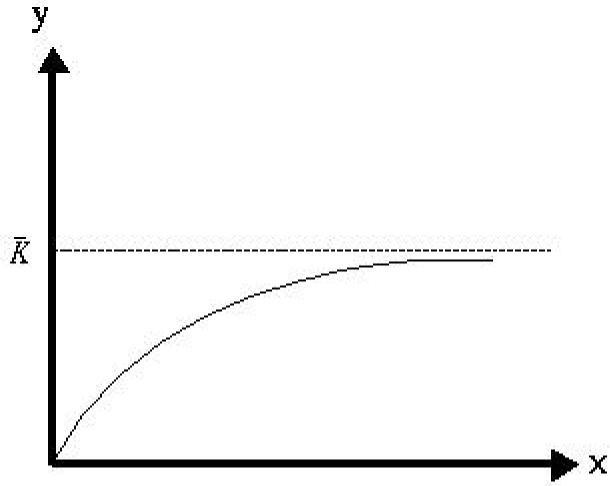


Dabei kennzeichnet der obere Ast eine Eintrittsgeschwindigkeit (v_{01}) oberhalb und der untere Ast Eintrittsgeschwindigkeit (v_{02}) unterhalb der Grenzgeschwindigkeit v_g. Beide Äste konvertieren gegen den Wert v_g, in unserem Beispiel 5 $^m/_s$.
Wenn man die Gleichungen für die beiden Äste ermittelt und deren Graphen in das bestehende Diagramm einfügt, stellt man fest, dass die Berechneten Punkte des oberen Asts etwas unterhalb und die des unteren Asts leicht oberhalb der jeweiligen Kurve liegen. Wenn man jedoch eine Tangente durch den Startpunkt einer der beiden Kurven legt, verläuft diese exakt durch den jeweils nächsten Punkt. Das liegt daran, dass in der rekursiven Berechnung zur Vereinfachung für die Dauer eines Zeitabschnitts Δt die verwendeten Größen (konkret: die Beschleunigung) konstant gehalten wurde, was nicht ganz richtig ist. Diese Linearisierung führt zu der beobachteten Verschiebung.



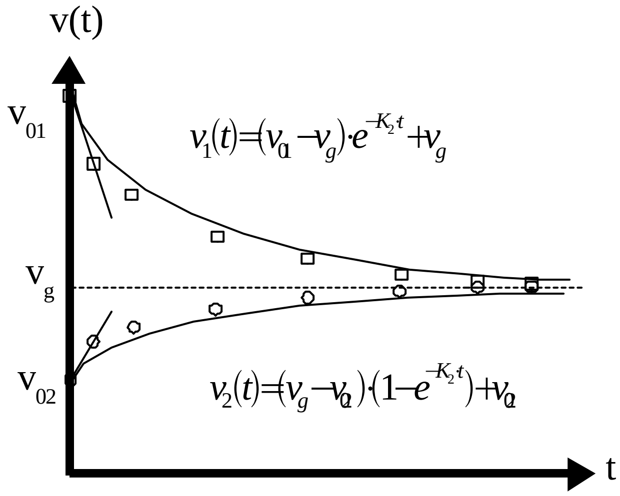
Aufgrund ihrer geometrischen Eigenschaften wurden die beiden Kurven als Graphen von e-Funktionen klassifiziert, einen Hinweis darauf gab die in der vorherigen Stunde ermittelte Differentialgleichung, deren Lösung ebenfalls eine e-Funktion erwarten ließ.
Um aus den beiden Graphen eine physikalische Gesetzmäßigkeit ableiten zu können, wurde zunächste einmal die Form einer e-Funktion an zwei einfachen Beispielen untersucht:





Für den linken Graphen ergibt sich eine Funktionsgleichung vom Typ $f(x)=K_1 \cdot e^{-K_2 \cdot x}$, für den rechten Graphen eine Gleichung vom Typ $f(x)=\bar{K} \cdot (1-e^{-K \cdot x})$.

Übertragen auf unsere Skizze bedeutet dies:



Diese beiden Gleichungen müssen die in der vorherigen Stunde ermittelte Differentialgleichung $\dot{v}(t)=g-\frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v(t)$ wahrmachen. Hierbei müssen zwei Fälle unterschieden werden, nämlich $g>\frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v(t)$ und $g<\frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v(t)$. Es wird der erste Fall betrachtet, der durch den unteren Ast des Diagramms dargestellt wird. Wenn man den ermittelten Term in diese Differentialgleichung einsetzt, erhält man

$$(v_g - v_{02}) \cdot (-e^{-K_2 \cdot t}) \cdot (-K_2) = g - [\frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot (v_g - v_{02}) \cdot (1 - e^{-K_2 \cdot t}) + v_{02}] \quad .$$

Ausmultiplizieren führt zu

$$K_2 \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t} = g - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot (v_g - v_{02}) + \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t} - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v_{02} \quad .$$

Die nun folgenden Rechnungen waren nicht mehr Bestandteil der Stunde und sind nur zur Vervollständigung aufgeführt:

$$K_2 \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t} = g - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v_g + \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v_{02} + \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t} - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v_{02}$$

$$K_2 \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t} = g - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v_g + \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t}$$

Aus der grafischen Darstellung ist ersichtlich, dass die Kurve umso flacher wird, je näher sich die Geschwindigkeit des fallenden Rahmens an v_g annähert. Für die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = g - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v(t)$ bedeutet dies, dass $\dot{v}(t)$ gegen 0 geht, wenn v(t) sich v_g nähert. Aus diesem Grund gilt $g - \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot v_g = 0$, der Grenzwert des Graphen ist nämlich v_g und der Grenzwert der ersten Ableitung ist 0. Von der Gleichung bleibt also übrig $K_2 \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t} = \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R} \cdot (v_g - v_{02}) \cdot e^{-K_2 \cdot t}$.

Daraus folgt $K_2 = \frac{B^2 \cdot d^2}{m \cdot R}$.