

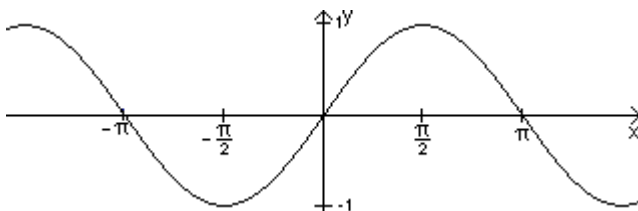
# Protokoll des Physikunterrichts am 11.03.2002 in der dritten und vierten Stunde

Zu Beginn des Unterrichts wurde noch einmal das Ergebnis der vorangegangenen Stunde wiedergegeben. Es bestand in der Wiederholung des Themas „Trigonometrische Winkelfunktionen“, wobei wir uns im Besonderen auf den Sinus konzentrierten. Dieser ist definiert als das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Übereinstimmung der Sinuswerte bei verschiedenen Großen Dreiecken mit gleicher Winkelgröße lässt sich durch den Satz über die Ähnlichkeit von Dreiecken (WWW) beweisen. Der Wert der Sinusfunktion lässt sich mit Hilfe des Einheitskreises bestimmen. Zu beachten ist weiterhin, dass es sich um eine periodische Funktion handelt, sich also ihre Funktionswerte mit betragsmäßig wachsendem Ausgangswert wiederholen. Zudem werden in der Physik Winkel zur vereinfachten Betrachtung meist im Bogenmaß gerechnet, da dieses dimensionslos ist.

Wir betrachteten nun einige Beispiele für Sinusfunktionen:

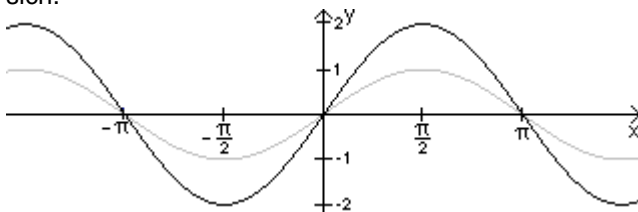
a)  $f(x) = \sin(x)$

Der Definitionsbereich liegt hier bei  $\mathbb{R}$  und der Wertebereich bei  $\{-1..1\}$ . Die zugehörige Funktionsgrafik sieht wie folgt aus:



b)  $f_1(x) = K_1 \cdot \sin(x)$

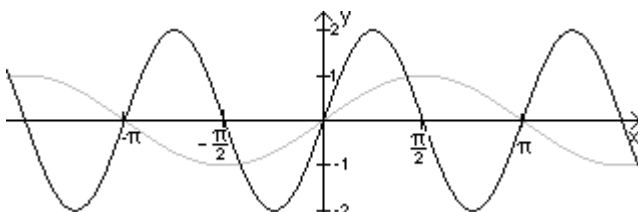
Hierbei streckt sich die Grafik in Y-Richtung bzw. wird gestaucht, man sagt, ihre Amplitude verändert sich.



(Im Beispiel wurde  $K_1$  auf 2 gesetzt, grau eingezeichnet ist hier die Normalfunktion  $f(x) = \sin(x)$ .)

c)  $f_2(x) = K_1 \cdot \sin(K_2 \cdot x)$

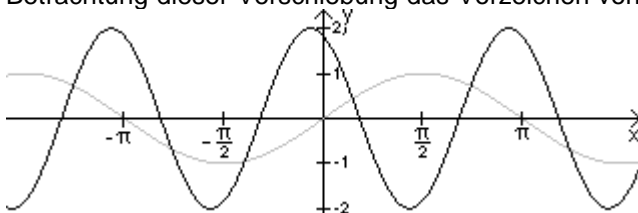
Nun wird die Grafik entlang der X-Achse gestreckt bzw. gestaucht, es verändert sich ihre Frequenz.



(Hier wurden  $K_1$  sowie  $K_2$  auf 2 gesetzt und die Normalfunktion erneut grau eingezeichnet.)

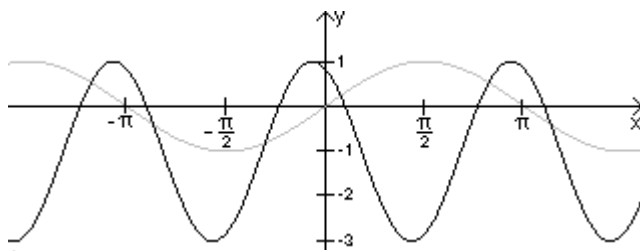
d)  $f_3(x) = K_1 \cdot \sin(K_2 \cdot x + K_3)$

Durch Hinzufügen von  $K_3$  wird die Grafik entlang der X-Achse verschoben, allerdings ist für die Betrachtung dieser Verschiebung das Vorzeichen von  $K_3$  als umgekehrt anzusehen.



( $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  wurden auf 2 gesetzt, die Normalfunktion grau dargestellt.)

- e)  $f_4(x) = K_4 + K_1 \cdot \sin(K_2 \cdot x + K_3)$   
 Die Konstante  $K_4$  verschiebt die Grafik entlang der Y-Achse.



( $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  haben hier den Wert 2,  $K_4$  wurde auf 1 gesetzt, die Normalfunktion ist grau eingezeichnet.)

### Zusammenfassung:

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = K_4 + K_1 \cdot \sin(K_2 \cdot x + K_3)$ . Es haben dann die Konstanten folgende Auswirkungen auf die Funktionsgrafik:

- $K_1$  : Streckung oder Stauchung entlang der Y-Achse (Amplitudenänderung), Spiegelung an der X-Achse beim Wert -1.
- $K_2$  : Streckung oder Stauchung an der X-Achse (Frequenzänderung).
- $K_3$  : Verschiebung entlang der X-Achse, jedoch Rechtsverschiebung bei negativem Vorzeichen und Linksverschiebung bei positivem.
- $K_4$  : Verschiebung entlang der Y-Achse.

Es wurden nun die beiden Funktionen

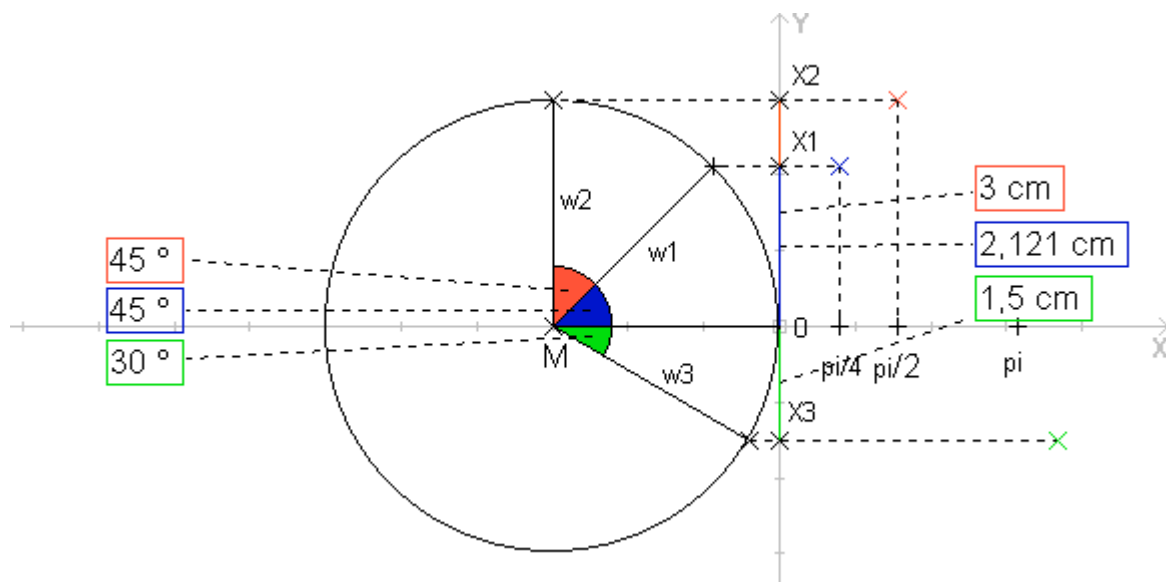
$$f_5(x) = 2 \cdot \sin(3x + 0,6)$$

und

$$f_6(x) = 2,5 \cdot \sin(3x - 0,8)$$

gegeben. In der Funktion  $f_7(x) = f_5(x) + f_6(x)$  sollten beide durch Addition kombiniert werden. Hierbei wäre eine Lösung nach den trigonometrischen Summenformeln möglich, es wurde jedoch im Unterricht ein anderer Lösungsweg eingeschlagen:

Zunächst wurde durch eine graphische Darstellung der Funktion mit Hilfe eines Kleincomputers ermittelt, dass es sich erneut um eine Sinusfunktion handelte. Zu suchen war nun ein zugehöriger Funktionsterm nach der Art von  $f_5(x)$ . Wichtig ist hier, dass der Faktor vor der Variable in beiden Gleichungen  $f_5$  und  $f_6$  der gleiche ist. Weiterhin bedienen wir uns zur Lösung dieser Aufgabe einer graphischen Konstruktion. Zunächst wurde anhand des Einheitskreises verdeutlicht, wie man den Sinus eines Winkels mit Hilfe dessen Größe ermitteln kann:



Der Einheitskreis wurde in dieser Grafik zur besseren Übersichtlichkeit auf den Radius  $r=3\text{cm}$  gesetzt. Es wurde zunächst der Winkel  $w_1$  von  $45^\circ$  vom Mittelpunkt des Kreises abgetragen. An seinem Schnittpunkt mit dem Kreis wurde eine parallele Strecke zur X-Achse soweit gezogen, bis sie im ersten Quadranten den Wert des Winkels von  $45^\circ$  im Bogenmaß (also  $p/4 \sim 0,79$ ) als X-Koordinate erhielt. Der Wert Y-Koordinate dieses Punktes gibt nun den Sinus des  $45^\circ$ -Winkels an, jedoch muss berücksichtigt werden, dass es sich nicht um einen Einheitskreis handelt und dieser daher noch durch 3 geteilt werden muss. Man erhält dann den Wert  $0,71$ , welcher der Sinus von  $45^\circ$  ist. Selbige Vorgehensweise wurde beim Winkel  $w_2$  von  $90^\circ$  angewandt. Der Abstand des entstandenen Punktes zur X-Achse beträgt exakt  $3\text{ cm}$ , also ist sein Sinus =  $1$ . Auch bei Winkeln größer als  $90^\circ$  ist das Verfahren anwendbar, so hat  $w_3$  den Sinus  $-0,5$  (das Vorzeichen resultiert daraus, dass der Winkel unterhalb der X-Achse abgetragen wurde und seine Größe daher eigentlich im vorliegenden Fall  $-30^\circ$  beträgt), wie ihn auch der Winkel von  $330^\circ$  (also der „Rest“ des Kreises) hätte. Das Abtragen der jeweiligen X-Koordinate im Bogenmaß ist für die Ermittlung des Sinuswertes unnötig, hilft jedoch bei der Darstellung der Sinuskurve. Eine weitere Erläuterung dieses Verfahrens findet sich im Protokoll der vorangegangenen Unterrichtsstunde vom 07.03.2002.

Betrachtet man nun beide Funktionen, so erkennt man, dass der Faktor vor der Sinusfunktion (also  $2$  bzw.  $2,5$ ) wie oben beschrieben die Amplitude der grafischen Darstellung ändert. Dies hat zur Folge, dass in unserem Modell zwei Einheitskreise benötigt werden, welche die Radien  $2$  bzw.  $2,5$  haben. Diese Radien der beiden Kreise betrachtet man von nun an als Zeiger, welche sich immer im gleichen Winkel zueinander und mit gleicher Geschwindigkeit drehen. Weiterhin ergeben die Werte, die in  $\xi$  und  $\xi_2$  zu  $x$  addiert werden ( $0,6$  bzw.  $-0,8$ ), dass dieser Winkel  $1,4$  im Bogenmaß (bzw.  $80^\circ$  im Gradmaß) sein muss, denn dieser Wert ergibt sich aus der Addition ihrer Beträge.

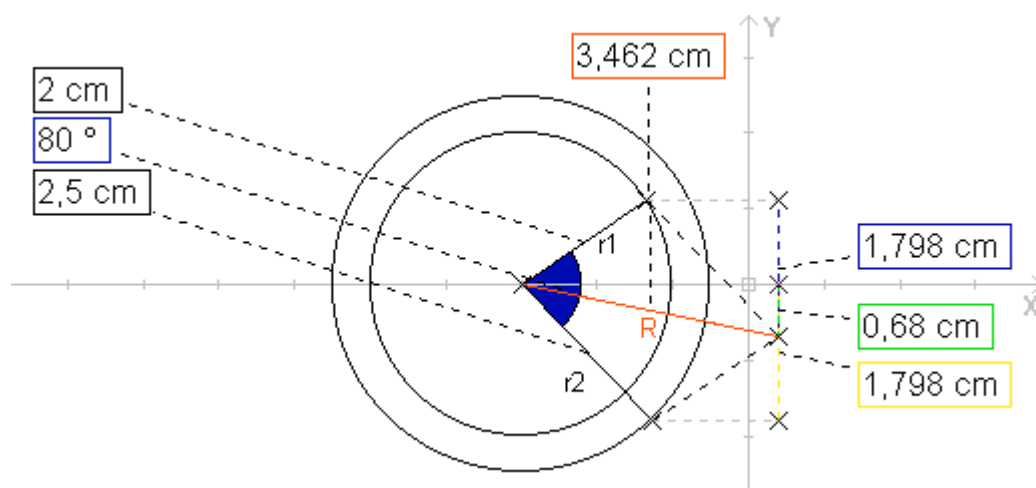
Nun betrachten wir, welche Werte beide Funktionen für das Einsetzen von  $x=0$  annehmen:

$$f_5(0) = 2 \cdot \sin(0,6) \\ \sim 1,13$$

$$f_6(0) = 2,5 \cdot \sin(-0,8) \\ \sim -1,8$$

$$f_7(0) \sim 1,13 - 1,8 \\ \sim -0,67$$

Diesen Fall ( $x=0$ ) wollen wir nun in unser Modell mit den beiden Einheitskreisen integrieren, wir berechnen also den Wert der Winkel beider Zeiger zur X-Achse im Gradmaß. Für den Winkel von  $\xi_5(0)$  ergibt sich ein Wert von  $34^\circ$ , für  $\xi_6(0)$  sind es  $-46^\circ$ . Trägt man diese Winkel nun als Radien der jeweils zugehörigen Kreise in der Zeichnung ab und vervollständigt diese zu einem Parallelogramm, so hat der Endpunkt seiner Resultierenden als Y-Koordinate genau den Funktionswert, welcher oben bereits mathematisch für  $f_7(0)$  ermittelt wurde:



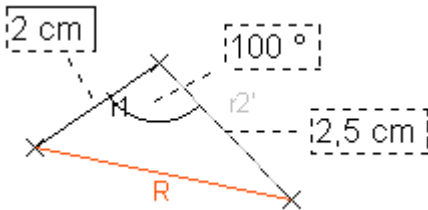
Der grün dargestellte Abstand des Resultierendenendpunktes erhält hier durch Rundungsfehler den Wert  $0,68\text{cm}$ . Es wurden zusätzlich noch die beiden äußeren Punkte der Radien  $r_1$  und  $r_2$  in den ersten Quadranten projiziert. Man erkennt, dass der Abstand des oberen Punktes zum Endpunkt der Resultierenden gleich dem des unteren Punktes zur Y-Achse ist.

Wäre nun die Darstellung für  $x=0,5$  erfolgt, so hätten sich beide Zeiger und die Resultierende um  $0,5$  (bzw.  $28,65^\circ$ ) gegen den Uhrzeigersinn gedreht, da dieser Wert laut der Ausgangsgleichung nur zum bereits erhaltenen Ergebnis hinzuzuaddieren wäre.

Wir betrachten nun die Wirkung von  $K_2$  (also dem Wert 3 in unserem Beispiel) auf die Darstellung: Diese gibt die Drehzeit der beiden Zeigerachsen an, welche konstant ist, da die beiden Zeiger und die Resultierende miteinander verbunden sind. Wir wissen also nun über die Gleichung von  $f_7(x)$ :

$$f_7(x) = \overline{K_1} \cdot \sin(3x + K_3),$$

wobei  $\overline{K_1}$  die Länge der Resultierenden ist. Diese lässt sich nun über das Dreieck aus  $r_1$ ,  $r_2$  (bzw. deren Parallele) und  $R$  berechnen, da zwei Strecken und ein Winkel bekannt sind.



Der Winkel, welchen  $r_1$  und  $r_2'$  einschließen, muss  $100^\circ$  betragen, da er sich mit dem von  $r_1$  und  $r_2$  eingeschlossenen Winkel zu  $180^\circ$  ergänzen muss. Hier kommt der Kosinussatz (auch der „erweiterte Satz des Pythagoras“ genannt) zum tragen. Er lautet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(?)$$

und unterscheidet sich vom bekannteren Satz für rechtwinklige Dreiecke ( $c^2 = a^2 + b^2$ ) durch das Korrekturglied  $-2ab \cdot \cos(?)$ , welches die Abweichungen bei der Berechnung nicht-rechtwinkliger Dreiecke wieder ausgleicht. In unserem Fall gilt also:

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cdot \cos(180^\circ - 80^\circ)$$

$$R = 3,46$$

Somit ist  $K_1$  bekannt, nur  $K_3$  ist noch zu ermitteln. Sie ist im Winkel, den die Resultierende und die X-Achse einschließen zu suchen. Dieser lässt sich aufgrund der bereits erhaltenen Daten leicht ermitteln:

$$\sin(\mathbf{d}) = \frac{f_7(0)}{K_1}$$

$$\mathbf{d} = -0,2$$

Nun ist die Funktion komplett. Sie lautet:

$$f_7(x) = 3,46 \cdot \sin(3x \cdot (-0,2))$$

Sinusfunktionen mit gleicher Periode (d. h. mit gleichem Faktor vor der Variablen  $x$ ) sind immer mit Hilfe dieser Methode addierbar. Letztlich werden dabei nur „Zeiger“ addiert, was bereits ein Vorgriff in die Vektorrechnung ist.

Es wurde darauf hingewiesen, dass für die nächste Unterrichtsstunde die noch nicht besprochenen Hausaufgaben zu bearbeiten sind, sofern dies noch nicht geschehen ist. Dies waren die Aufgaben 4 auf Seite 148, 9 auf Seite 134 und 4 auf Seite 138. Zudem sollte das Material über Effektivspannung im Physikbuch gründlich studiert werden.

Protokoll von A. Hümmerich