

Protokoll der Physikdoppelstunde am 06.06.2002

Protokollant: Alexander Rudyk

Die Schüler sollten zu Hause die Nullstellen der in der letzten Stunde ermittelten Funktion $\hat{s}(\omega)$ für die **maximale Amplitude** einer angeregten Schwingung in Abhängigkeit der Erregerfrequenz ermitteln. Die relevante Nullstelle findet sich als Wurzelterm:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{f^2}{2m^2}}$$

Hier sehen wir nochmal, dass ohne Reibung für maximale Auslenkung die Erregerfrequenz der Schwingfrequenz entsprechen muss, nur durch die Reibungskonstante f und die Masse des Schwingers m wird das Maximum verschoben.

Mit dieser Formel lässt sich die Erregerfrequenz ermitteln, bei der die Amplitude maximal ist – anschließend suchten wir die Frequenz, bei der die Energieübertragung vom Erreger zum Schwinger maximal wird. Wie wir in der letzten Stunde im Versuch beobachten konnten, überträgt der Erreger manchmal seine gesamte Energie zum Schwinger.

Dafür betrachten wir die **Energie**, die über den Zeitraum einer Periodenlänge “wandert”, als Integral der Leistung $P(t)$:

$$W_0^T = \int_0^T P(t) dt$$

Hierfür nutzen wir die in der letzten Stunde ermittelte Formel für die Leistung $P(t)$ und setzen in diese $F(t)$ und $s(t)$ ein:

$$P(t) = F(t) \cdot s(t)$$

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\Rightarrow P(t) = \hat{F} \cdot \hat{s} \cdot \omega \cdot \sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Nun bilden wir das Integral, die Konstanten in $P(t)$ können wir dabei herausziehen:

$$W_0^T = \hat{F} \cdot \hat{s} \cdot \omega \cdot \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) dt$$

Ein ähnliches Integral (mit anderen Konstanten) kennen wir bereits von unseren Energiebetrachtungen am Wechselstromkreis. Zum Lösen dieses Integrals kann nach Anwendung trigonometrischer Gesetze der Ausdruck in mehrere Teilintegrale aufgeteilt werden, von denen dann zahlreiche wegfallen. Letztlich erhält man folgendes Ergebnis:

$$W_0^T = \frac{1}{2} \hat{F} \cdot \hat{s} \cdot \omega \cdot \sin \varphi \cdot T$$

Hier lässt sich auch sofort ablesen, dass der Energiefluss größtmöglich wird, wenn der Sinusausdruck 1 ergibt. Das ist bei einer Phasenverschiebung φ von 90° der Fall. In diesem Fall gilt:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t)$$

Damit untersuchten wir die weiteren Zusammenhänge für den speziellen Fall der Phasenverschiebung von 90° . Unser Integral für die Energieabgabe über das Intervall 0 bis T sieht dann folgendermaßen aus:

$$W_0^T = \hat{F} \cdot \hat{s} \cdot \omega \cdot \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt$$

Hier finden sich wieder Analogien zu Leistung und Energie im Wechselstromkreis: Auch hier konnten wir feststellen, dass bei $P(t) = \sin^2 \omega t$ die umgewandelte Energie ihren maximalen Wert erreicht.

In diesem Fall ist die Leistungskurve nie negativ, also immer oberhalb der x-Achse, es fließt also nie Energie zurück.

Bei maximaler Energieumsetzung gilt für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit folglich:

$$v(t) = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$v(t) = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(t) = \hat{s} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

In diesem Fall sind also die treibende Kraft (Sinuskurve) und die momentane Geschwindigkeit (hier ebenfalls eine Sinuskurve) in Phase. Wir stellen allgemein fest, dass der Energietransfer maximal ist, wenn Kraft und Geschwindigkeit in Phase liegen.

Nun berechnen wir noch die **mittlere Leistung** über eine Periodenlänge:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{W_0^T}{T} = \frac{1}{2} \hat{F} \cdot \hat{s} \cdot \omega \cdot \sin \varphi$$

Wie es schon in der Formel gekennzeichnet ist, stellen wir fest, dass die mittlere Leistung abhängig ist von der Erregerfrequenz. Das führt uns zur zweiten Fragestellung: Bei welcher Erregerfrequenz ist die Energieübertragung maximal? Dazu ersetzen wir die andere Variable in $P(\omega)$, die von ω abhängig ist, \hat{s} :

$$\bar{P}(\omega) = \frac{\frac{1}{2} \hat{F}^2 \cdot \omega}{\sqrt{m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + f^2 \omega^2}}$$

Wir konnten hier auch das $\sin \varphi$ durch 1 ersetzen, weil uns nur das Maximum der Energiübertragung interessiert und wir haben oben bereits untersucht, dass dafür $\varphi = 90^\circ$ gelten muss.

Wir wiederholten hierbei nochmal das Ergebnis, das wir aus der Funktion für \hat{s} gewonnen haben: Die Frequenz, bei der die Auslenkung einer erzwungenen Schwingung maximal wird, ist abhängig von der Reibung, diese verschiebt das Maximum. Wir suchen nun auch hier das Maximum und bilden daher, wie bei unseren Überlegungen zu \hat{s} , die erste Ableitung:

$$P_{max}^{-'}(\omega) = \frac{\hat{F}^2 m^2 (\omega_0^4 - \omega^4)}{2 (f^2 \omega^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hieraus entnehmen wir, dass das Maximum der mittleren Leistung erreicht wird, wenn gilt:

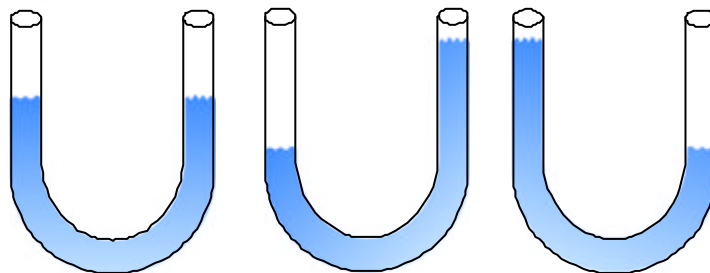
$$\begin{aligned} \omega_0^4 - \omega^4 &= 0 \\ \omega &= \omega_0 \end{aligned}$$

Das heißt, die Energieumsetzung ist immer dann maximal, wenn die Erregerfrequenz der Frequenz der freien Schwingung entspricht, unabhängig von der Reibung.

Mit diesen Erkenntnissen können wir jetzt zusammenfassend resümieren, inwieweit die **Reibung** die Eigenschaften einer Schwingung beeinflusst. Das ist insbesondere deshalb wichtig, weil die Reibung oft vernachlässigt wird, weil sie in vielen Fällen nur zu geringen Änderungen beiträgt, deswegen muss man in diesen Fällen wissen, welche möglichen Fehler sich durch diese Vereinfachung ergeben:

- Die Auslenkung \hat{s} nimmt mit zunehmender Zeit ab, die Schwingung wird gedämpft. Bei einer linearen, von der Geschwindigkeit unabhängigen, Reibung, etwa der Gleitreibung, ist auch der Abfall der Auslenkung linear. Bei exponentieller Reibung, die abhängig von der Geschwindigkeit ist, fällt auch die Auslenkung exponentiell ab. Weitere Reibungen, in deren mathematischem Ausdruck $v(t)$ im Quadrat etc.. auftaucht, haben noch eine entsprechend stärkere Wirkung auf die Auslenkung.
- Die Periodenlänge T nimmt bei starker Reibung zu, also wird die Frequenz kleiner.
- Die Reibung verhindert, dass eine erzwungene Reibung sich über alle Grenzen aufschauelt, indem sie Energie aus dem System entzieht.
- Die Erregerfrequenz ω , die bei einer erzwungenen Schwingung nötig ist, um die maximale Auslenkung zu erreichen, verschiebt sich je nach Reibung (siehe oben).
- Die Frequenz, die zu einem maximalen Energietransfer führt, ist dagegen *nicht* von der Reibung abhängig.

Wir haben in den Stunden, in denen wir uns bereits mit Schwingungen beschäftigten, bereits einige verschiedene Arten von Schwingungen kennengelernt. Nun beobachteten wir noch eine weitere: Eine **schwingende Flüssigkeit** in einem U-Rohr. Durch Blasen in das eine Ende des Rohrs wird die Flüssigkeit in Richtung des anderen Endes gedrückt, anschließend schwingt sie im Rohr.

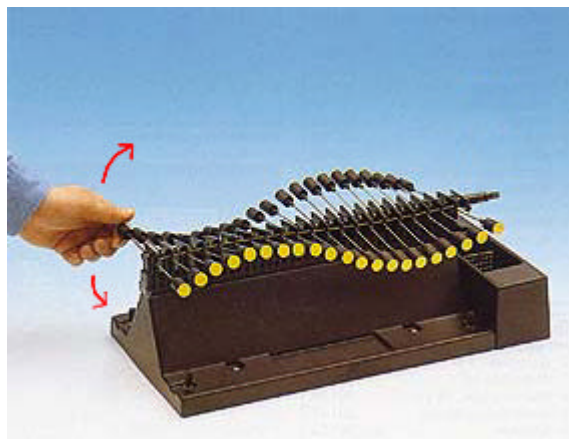


Die Frage, ob das Wasser eine harmonische Schwingung vollführt, konnten wir nur er-

raten und nicht physikalisch erklären. Wir erfuhren, dass es sich tatsächlich um eine harmonische Schwingung handelt und dass dieser Sachverhalt in unserem Physikbuch erläutert ist. Die Schwingung hängt dabei auch von der **Dichte** (definiert als Masse pro Volumen) der Flüssigkeit ab. Neben dem Dichtebegriff wiederholten wir auch das **spezifische Gewicht**, das die Gewichtskraft pro Volumen angibt. Es entspricht gerade der Dichte multipliziert mit $9,81 \text{ N / kg}$, jene findet aber weitere Verbreitung, weil es sich nur bei der Dichte um eine Materialkonstante handelt, die nicht von äußeren Faktoren abhängig ist.

Wir bekamen die Aufgabe, den entsprechenden Abschnitt zu Hause gründlich zu studieren. Auch die anderen bereits zu lesenden Gebiete sollen in der nächsten Stunde im Rahmen einer Fragestunde aufgearbeitet werden.

Anschließend führten wir einen Versuch mit einer Versuchsanordnung durch, auf der viele einzelne Schwinger nebeneinander angeordnet und durch ein Gummiband miteinander gekoppelt sind. Durch das Gummiband bedingt ist die Kopplung relativ stark, d.h. die vollständige Energieübertragung von einem Schwinger zum nächsten geht sehr schnell. Wenn wir einen Kopf des ersten Schwingers anheben und schnell wieder absenken, können wir beobachten, wie sich diese Auf- und Ab-Bewegung durch die Reihe der Schwinger bewegt: Jeder Schwinger vollführt diese Bewegung und verharrt anschließend auf dem Ausgangspunkt der Bewegung, außerdem bringt er seinen Nachbarn dazu, dieselbe Bewegung auszuführen, so bewegt sich die Schwingung durch die Reihe, bis sie am Ende des Aufbaus angelangt: Hier wird die Bewegung "reflektiert", sie wechselt die Richtung und kehrt wieder über die Schwingerkette zum angeregten Schwinger zurück, wo sie wiederum reflektiert wird, bis sie durch Reibung zum Stillstand kommt (meist nach etwa $1 \frac{1}{2}$ Durchläufen). Wir wiederholten diesen Versuch mehrmals in vergleichbarer Durchführung, so lässt sich der Schwingerkopf auch nach unten bewegen, wir sehen dann, wie diese Bewegung von Schwinger zu Schwinger weiterläuft.



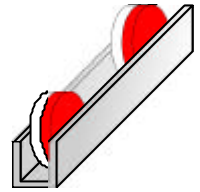
Wir erfahren, dass die Stelle, an der die sich fortbewegende Schwingung liegt, als "Wellenberg" bezeichnet wird. Diese Beobachtungen illustrieren nochmal die Energieübertragung von einem Schwinger zum anderen, wie wir sie im ersten Teil der Stunde quantitativ ermittelt haben. Wir stellen auch noch einmal fest, dass zwei Schwinger immer irgendwie gekoppelt sein müssen, damit es zur Energieübertragung kommen kann und damit sich diese gegenseitig beeinflussen bzw. anregen können.

Wir erfahren, dass die Stelle, an der die sich fortbewegende Schwingung liegt, als "Wellenberg" bezeichnet wird. Diese Beobachtungen illustrieren nochmal die Energieübertragung von einem Schwinger zum anderen, wie wir sie im ersten Teil der Stunde quantitativ ermittelt haben. Wir stellen auch noch einmal fest, dass zwei Schwinger immer irgendwie gekoppelt sein müssen, damit es zur Energieübertragung kommen kann und damit sich diese gegenseitig beeinflussen bzw. anregen können.

Anschließend haben wir uns weiter mit der Wellenbewegung beschäftigt: Insbesondere, dass Wellen reflektiert werden, ist uns bereits aus dem Alltag bekannt. Schallwellen etwa sind zwar, so erfahren wir, eine andere Art von Welle, aber auch sie werden reflektiert, wie jegliches Echo etwa anschaulich demonstriert. Auch Musikinstrumente (z.B. Blasinstrumente) basieren auf der Reflexion der Schallwellen im Resonanzkörper. Wir führen obigen Versuch durch, indem wir den Schwingerkopf kontinuierlich auf- und abbewegen. Bei der richtigen Geschwindigkeit dieser Bewegung stellen sich schnell sogenannte "stehende Wellen" ein, weil sich durch die Reflexion am Ende des Aufbaus nun mehrere Wellen überlagern.

Einen ähnlichen Versuch führen wir noch mit einer Eisenschiene durch, in der mehrere

runde Magnete liegen, die in dieser Schiene hin- und herrollen können. Sie beeinflussen sich durch die magnetischen Anziehungskräfte, dies ist also hier die Kopplung, mittels der die Energieübertragung erfolgt. Wenn wir den ersten Magneten ein Stück hin- und herrollen, veranlassen die magnetischen Kräfte auch seine nachfolgenden Magneten nacheinander dazu, dieselbe Bewegung auszuführen. Auch hier beobachten wir am Schienende eine Reflexion der Bewegung.



Wir konnten festhalten, dass dies alles nur Modelle sind, mit denen sich allgemeingültige Zusammenhänge herleiten und erklären lassen. Wir untersuchten die Unterschiede der beiden vorgestellten Modelle und stellten fest, dass im ersten Versuch die Schwinger senkrecht oder quer zu der Richtung, in der sich der Wellenberg fortbewegt, bewegt werden, während im zweiten Versuch die Auslenkung längs der Bewegung des Wellenbergs erfolgt. Konsequenterweise spricht man im ersten Fall auch von einer Querbewegung, die eine Querswelle zur Folge hat, der Fachbegriff dafür lautet *Transversalwelle*. Im zweiten Fall handelt es sich um eine Längsbewegung, die eine Längswelle hervorbringt, diese heißt *Longitudinalwelle*.

Weiterhin hielten wir fest, dass man an unseren Modellen zwei verschiedene Geschwindigkeiten unterscheiden und auch untersuchen muss: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung und die Schnelle, die Geschwindigkeit der Schwingungen.

Abschließend haben wir uns noch zwei weitere Modelle für mechanische Schwingungen angesehen: Ein an beiden Seiten festgehaltener und so gespannter Slinky® wurde an einer Stelle schnell in eine horizontale oder vertikale Richtung gedrückt, diese Störung breitete sich ebenfalls zur anderen Seite aus, wurde dort reflektiert und kehrte sich so um. Hier konnten wir auch erkennen, dass es sich eindeutig um eine Reflexion handelt: Bewegten wir den Slinky® so, dass die Welle auf der linksgelegenen Seite hinlief, so kehrte sie nach der Reflektion auf der rechten Seite zurück. Indem wir das Drahtgebilde in Längsrichtung schoben oder zogen, konnten wir auch Längswellen beobachten.



Wir erfuhren, dass man die unterschiedlichen Charakteristika der beiden Wellentypen etwa bei der Erdbebenforschung ausnutzt: Bei einem Beben breiten sich beide Störungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus, dadurch werden verschiedene Untersuchungen möglich.

Zu guter Letzt führten wir derartige Versuche auch mit einem über den Boden gespannten Springseil aus: Hier konnten wir beobachten, dass die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle ausbreitet, abhängig von der Spannung des Seils ist. Der Wellenberg lief hier jeweils mehrfach hin- und her, wenn wir das Seil vom Boden aufhoben und so die Reibung verringerten, lief die Störung sogar noch öfter zwischen beiden Enden entlang.

Anmerkungen:

Slinky® ist ein eingetragenes Warenzeichen der Poof Products, Inc.

Das Slinky Bild entstammt dem Online-Angebot von Poof Products, Inc.

Bild 2 entstammt dem Online-Katalog der Leybold Didactic GmbH.